8/11/2016

ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω $a_1,\dots,a_n, c \in \mathbb{Z}$ και $d=(a_1,\dots,a_n)$ Μέγιστος Κ.Δ.
Η εξίσωση $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=c$ έχει ακέραιες λύσεις
ανν $d|c$

$ax+by=c$ Λύσεις ακέραιες αν $(\alpha,b)|c$

- Βρες μια λύση (x_0,y_0)
- Γενική λύση $x=x_0+\frac{b}{(\alpha,b)}\cdot t$, $y=y_0-\frac{\alpha}{(\alpha,b)}t$ $t\in\mathbb{Z}$

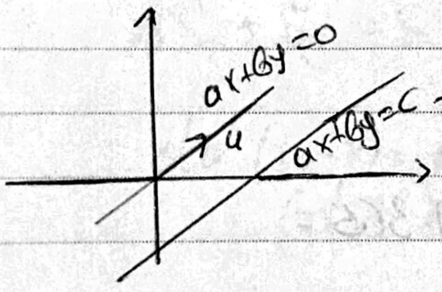
Άσκηση

π.χ. Να λυθεί αν λύνεται στους ακεραίους η $x(y-1)=y+1$

ΟΧΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ.

$ax+by=0$ (*), $a,b\in\mathbb{R}$
Ευθεία $b\neq 0$ $y=-\frac{a}{b}x$

Λύσεις της (*) αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο.



→ δεν είναι υπόχωρος επειδή δεν περιέχει από το 0.

π.χ. 1) Να λυθεί στους ακεραίους

$6x+8y+10z=1$ (1) → Επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ (δεν είναι υπόχωρος)

$\text{ΜΚΔ}(6,8,10)=2\nmid 1$ Αδύνατη στους ακεραίους

(1) $\Rightarrow 10z=1-6x-8y \Rightarrow z=\frac{1}{10}-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y$ Επίπεδο
όχι ακέραιες λύσεις.

2) Να λυθεί στους ακεραίους $6x+4y+8z=2$ (1)

$(6,4,8)=2 \mid 2$ έχουμε ακέραιες λύσεις

$(1) \Rightarrow \underbrace{3x+2y}+4z=1$

$3x+2y=(3,2)w=1w=w$ $\Big\} \Rightarrow w+4z=1$

Λύση $(-3,1)$ $\quad -3+4\cdot 1=1$.

άρα $w=-3+4t$ $\quad t\in\mathbb{Z}$

$z=1-t$

$3x-2y=1$ $\quad (w=-3+4t)$

$1 \quad -1$

$w \quad -w$

άρα $x=w+2s$, $s\in\mathbb{Z}$

$y=-w-3s$

$$\boxed{\begin{aligned} z&=1-t\\ x&=-3+4t+2s\\ y&=3-4t-3s\\ &t,s\in\mathbb{Z}\end{aligned}}$$

3) Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακέραιων λύσεων της $392x+21y=14$

$$\begin{array}{r|l} 392 & 21 \\ \underline{21} & 18 \\ 182 & \\ \underline{168} & \\ 14 & \end{array}$$

$(392,21)=(21,14)$

$392=18\cdot 21+14 \Rightarrow 14=392-18\cdot 21$

$21=1\cdot 14+7 \Rightarrow 7=21-14$

$14=2\cdot 7$

$7=21-(392-18\cdot 21)=-392+19\cdot 21$

$14=392x+21\cdot y$

$14=-2\cdot 392x+38\cdot 21$

$x_0=-2$ $\quad y_0=38$

$x=-2+\frac{21}{7}t \Rightarrow x=-2+3t$

$t\in\mathbb{Z}$

$y=38-\frac{392t}{7} \Rightarrow y=38-56t$

Πρέπει $x,y>0 \Rightarrow -2+3t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3t>2 \Rightarrow t>\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{t\geq 1}$

$38-56t>0 \Rightarrow \frac{38}{56}>\frac{56}{56}t \Rightarrow \boxed{t\leq 0}$

Συναλήθευση: $t\geq 1$ και $t\leq 0$ αδύνατο. Η εξίσωση αυτή δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

Πλήθος μη αρνητικών λύσεων της $ax+by=c$ όταν $(a,b)|c$
Έστω (x_0,y_0) μια λύση.
Τότε
$$x=x_0+\frac{b}{(a,b)}\cdot t$$
$$t\in\mathbb{Z}$$
$$y=y_0-\frac{a}{(a,b)}t$$

Πρέπει $x_0+\frac{b}{(a,b)}t\geq 0$ και $y_0-\frac{a}{(a,b)}\cdot t\geq 0$

$$-\frac{x_0(a,b)}{b}\leq t\leq\frac{y_0(a,b)}{a}$$

Διοφαντικό Πρόβλημα

Έστω $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Η εξίσωση $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ καλείται διοφαντική εξίσωση και το πρόβλημα εύρεσης ακέραιων λύσεων καλείται Διοφαντικό πρόβλημα

Π.Χ. $f(x,y)=x^2-2y^2$
Δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους
$f(x,y)=0 \Leftrightarrow x^2-2y^2=0$ Εξίσωση. Ακέραιες λύσεις $(x,y)=(0,0)$ μόνο
Έχει άπειρες λύσεις στους πραγματικούς.

Σχέσεις Ισοδυναμίας

A και B σύνολα
R(relation) σχέση είναι ένα υποσύνολο του $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$

Π.Χ. $f:A\to B$ συνάρτηση
Με τη βοήθεια της f ορίζουμε σχέση στο $A\times B$.

$$R=\{(a,f(a))\,|\,a\in A\}\subseteq A\times B$$

Π.χ $A=\{x,y\}$ $B=\{1,2,3\}$

$R=\{(x,1),(x,2),(y,2)\}$

Σχέση Ισοδυναμίας: $A=B$

Μια σχέση Σ στο σύνολο A θα είναι σχέση ισοδυναμίας αν

1) Ανακλαστική - Αυτοπαθής ιδιότητα

$\forall a \in A$ τότε $(a,a) \in \Sigma$

2) Συμμετρική

Αν $(a,b) \in \Sigma$ τότε $(b,a) \in \Sigma$

3) Μεταβατική

Αν $(a,b) \in \Sigma$ και $(b,c) \in \Sigma \Rightarrow (a,c) \in \Sigma$

Π.Χ $A=\{1, □, ☺\}$

Σ σχέση ισοδυναμίας

$\Sigma=\{(1,1),(□,□),(☺,☺)\}$

$\Sigma'=\{(1,1),(□,□),(☺,☺),(□,☺),(☺,□)\}$

$\Sigma''=\{(1,1),(□,□),(☺,☺),(1,☺),(☺,1)\}$

$\Sigma'''=\{\_\_,\_\_,\_\_,(1,□),(□,1)\}$

$\Sigma''''=\{\_,\_,\_,\_,\_,(□,☺),(☺,□),(1,☺),(☺,1)\}$

Σ'''' η μεγαλύτερη

Π.χ. Στο σύνολο του Τμ. Μαθηματικών ορίζεται η σχέση $A \sim B$ αν οι φοιτητές A και B έχουν περάσει τον ίδιο αριθμό μαθημάτων. Εξετάστε αν είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρέπει να ικανοποιεί τις 3 ιδιότητες

1) Ανακλαστική: $\forall A \in$ Σύνολο $\Rightarrow A \sim A$ ισχύει
2) Συμμετρική: Αν $A \sim B$ (έχουν περάσει τον ίδιο αριθμό μαθημάτων) $\Rightarrow B \sim A$
3) Μεταβατική: Αν $A \sim B$ και $B \sim \Gamma \Rightarrow A \sim \Gamma$

Ορισμός

Έστω Σ μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A. Με $\bar{a}$ ή $[a]$ εκφράζουμε το υποσύνολο του A το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία του A τα οποία είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

$[a] = \bar{a} = \{ b \mid b \in A$ και $(a,b) \in \Sigma \}$

Ο a ονομάζεται αντιπρόσωπος της κλάσης. Κάθε στοιχείο $[a] = \bar{a}$ μπορεί να είναι αντιπρόσωπος.

Π.χ. Στο προηγούμενο παράδειγμα οι κλάσεις καθορίζονται από τον αριθμό των μαθημάτων.

Πρόταση: Έστω A σύνολο και Σ μια σχέση ισοδυναμίας στο A.
Αν $a, b \in A$, τότε $[a] = [b]$ ή $[a] \cap [b] = \emptyset$

Απόδειξη

Έστω $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in A$ και $c \in [a]$ και $c \in [b] \Rightarrow$
$(a,c) \in \Sigma$ και $(b,c) \in \Sigma \Rightarrow (c,b) \in \Sigma \Rightarrow (a,b) \in \Sigma \Rightarrow$
$\Rightarrow [a] = [b]$

Πόρισμα: Έστω A σύνολο και Σ σχέση ισοδυναμίας, τότε το A γράφεται σαν ξένη ένωση των κλάσεων ισοδυναμίας.

Απόδειξη

Έστω ότι οι κλάσεις είναι οι εξής: $[a_1], [a_2], \ldots, [a_n]$
Αυτές είναι ξένες μεταξύ τους.

$[a_i] \subseteq A \quad i=1,\ldots,n$

$[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \quad i \neq j$

$[a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_n] \subseteq A$

Θέλουμε το αντίστροφο. Έστω $a \in A$

$[a]$ η κλάση του a. Θα υπάρχει i ώστε $[a] = [a_i]$

$a \in [a] \to a \in [a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_n]$

Άρα $A \subseteq [a_1] \cup [a_2] \cup \ldots [a_n]$

$A = [a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_n]$